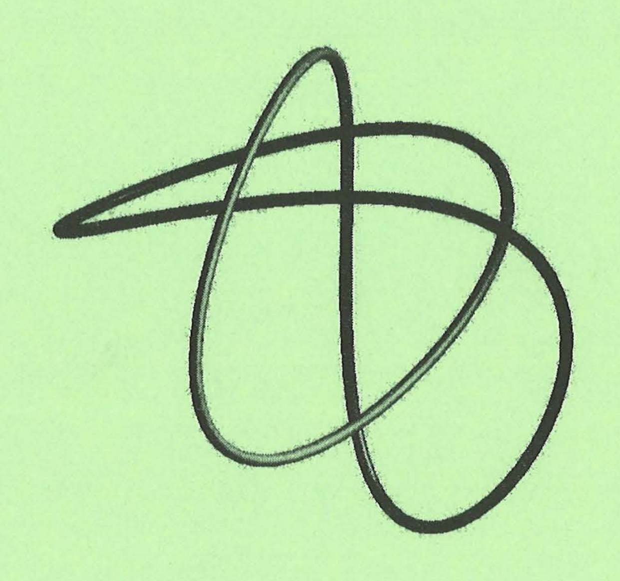
GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE CURVAS Y SUPERFICIES

CURVAS

por

M. EUGENIA ROSADO MARÍA



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-80-05

GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE CURVAS Y SUPERFICIES

CURVAS

por

M. EUGENIA ROSADO MARÍA

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-80-05

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA

NUMERACIÓN

2 Área
51 Autor
09 Ordinal de cuaderno (del autor)

TEMAS

0 VARIOS
1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN

Geometría diferencial de curvas y superficies. Curvas

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Gestión y portada: Almudena Gil Sancho.
CUADERNO 314.01 / 3-80-05
ISBN-13 (obra completa): 978-84-9728-347-2
ISBN-13: 978-84-9728-348-9
Depósito Legal: M-16934-2011

Esta serie con título: "Geometría diferencial de curvas y superficies" formada por dos cuadernillos:

- Curvas
- Superficies

recoge el estudio desde el punto de vista diferencial de las curvas y superficies. Estos cuadernillos pretenden ser un complemento teórico y práctico a la docencia desarrollada en el aula en la materia del estudio diferencial de las curvas y superficies.

La estructura de ambos cuadernillos es homogénea. En cada tema se desarrolla la teoría incluyendo las demostraciones de los resultados que se han considerado más relevantes así como ejemplos que pretenden ilustrar los conceptos presentados en la teoría. En cualquier caso, la exposición teórica de los resultados no pretende ser más que un guión que puede seguir el profesor, decidiendo por sí mismo cómo presentar los resultados y qué demostraciones realizar en el aula. Tanto los conceptos, resultados y demostraciones presentados se pueden encontrar en cualquier texto convencional de la materia, ya que dichos resultados son clásicos.

Me gustaría mostrar mi agradecimiento a los profesores y alumnos que me han hecho llegar sugerencias y que han detectado erratas en las versiones preliminares de dichos cuadernillos así como las que me puedan hacer llegar en el futuro. En particular me gustaría agradecer al profesor Pedro Galán la ingrata tarea de detectar erratas y tanto a él como al profesor Francisco Padial la ayuda que me han prestado a la hora de incluir gráficas en ambos cuadernillos. Finalmente me gustaría agradecer a Almudena Gil, becaria de la edición de los cuadernillos del Instituto Juan de Herrera, su trabajo a la hora de publicar dichos cuadernillos.

Curvas

M. Eugenia Rosado María
Departamento de Matemática Aplicada
Escuela Técnica Superior de Arquitectura, UPM
Avda. Juan de Herrera 4, 28040-Madrid, Spain
E-mail: eugenia.rosado@upm.es

Índice

1 Representación analítica de curvas

Podemos pensar en una curva C como la trayectoria que describe un punto moviéndose en el espacio. Considerando las coordenadas cartesianas (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$, las coordenadas del punto P de la curva vendrán expresadas en función de un parámetro que podemos denotar t y que toma valores en cierto intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$:

$$x = x(t), \;\; y = y(t), \;\; z = z(t), \;\; t \in I.$$

Esto es, la curva es el conjunto C de puntos de $\mathbb{R}^3$ con coordenadas $(x(t), y(t), z(t))$, con $t \in I$. A la aplicación $\vec{r}$: $I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ la llamaremos *representación paramétrica* de la curva C.

También podemos considerar una C como el conjunto de puntos intersección de dos superficies; esto es, la curva es el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ con coordenadas (x, y, z) que satisfacen dos ecuaciones: $F(x, y, z) = 0$ y $G(x, y, z) = 0$. Las ecuaciones $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$ se denominan *ecuaciones implícitas* o *cartesianas* de la curva.

Veamos algunos ejemplos sencillos de curvas con distintas representaciones paramétricas e implícitas.

Ejemplos

1. *Línea recta.* Una línea recta en el espacio viene dada por una representación paramétrica de la forma:

   $$\vec{r}(t) = (a_1 + tb_1, a_2 + tb_2, a_3 + tb_3)\,,$$

   donde a_i, b_i son constantes y al menos uno de los $b_i \neq 0$.

   También podemos considerar la línea recta como intersección de dos planos. Por ejemplo, la recta de ecuaciones paramétricas

   $$x(t) = a_1 + tb_1, \;\; y(t) = a_2 + tb_2, \;\; z(t) = a_3 + tb_3,$$

   se puede considerar como la intersección de los planos π_1, π_2 de ecuaciones:

   $$\begin{cases} \pi_1 \equiv \frac{x-a_1}{b_1} = \frac{y-a_2}{b_2}, \\ \pi_2 \equiv \frac{x-a_1}{b_1} = \frac{z-a_3}{b_3}. \end{cases}$$

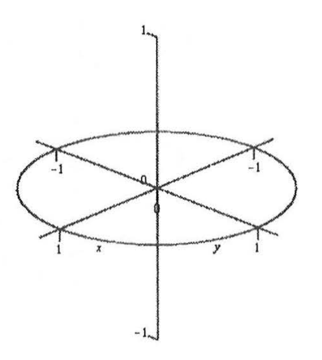
2. *Circunferencia.*

Descripción geométrica: La circunferencia es el conjunto de puntos de un plano que equidistan de un punto dado.

La circunferencia es una curva plana pues está contenida en un plano. Una representación paramétrica de la circunferencia de radio a, centro el origen de coordenadas y contenida en el plano $z = 0$ es:

$$\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, 0)\,,\; t \in [0, 2\pi),$$

donde a es el radio de la circunferencia y t es el ángulo formado por el punto $P = \vec{r}(0)$, el origen de coordenadas O y el punto genérico $X = \vec{r}(t)$ de la circunferencia.



Circunferencia

Otra posible representacion paramétrica de la circunferencia es:

$$\vec{r}(t) = (a\cos 2t, a\sin 2t, 0)\,,\; t \in [0, \pi),$$

en la que estamos recorriendo la circunferencia a doble velocidad.

Consideramos el conjunto de puntos con coordenadas (x, y, z) que satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ z = 0, \end{cases}$$

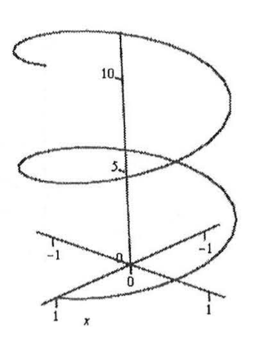
esto es, estamos considerando la circunferencia como la intersección de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ con el plano de ecuación $z = 0$.

La misma circunferencia la podemos considerar como la intersección del paraboloide de ecuación $x^2 + y^2 - z = a^2$ con el plano de ecuación $z = 0$:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z = a^2, \\ z = 0. \end{cases}$$

La misma circunferencia la podemos considerar como intersección del cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = a^2$ con el plano de ecuación $z = 0$.

3. *Hélice circular.* Esta curva está contenida en un cilindro circular por ejemplo, el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = a^2$ y lo rodea de manera que cuando x e y vuelven a sus respectivos valores iniciales, z se ha incrementado $2\pi b$. Véase la siguiente gráfica:



Hélice circular

Una representación paramétrica de la hélice circular es la siguiente:

$$\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)\,,\ t \in [0, 2k\pi),\ \text{con } k \in \mathbb{N}.$$

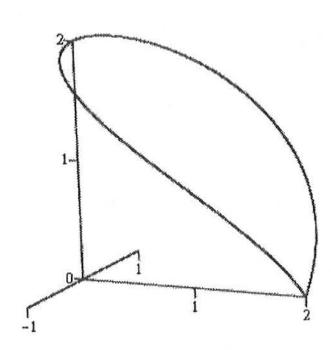
El parámetro t mide el ángulo que forma el eje x con la recta que une el punto O con la proyección del punto genérico $P \in C$ con el plano xy.

4. *Curva de Viviani.* Es la curva intersección de una semiesfera con un cilindro de eje paralelo a un diámetro de la esfera. Por ejemplo, consideremos la semiesfera de centro el origen de coordenadas y radio 2 y el cilindro de base la circunferencia de centro el punto Z de coordenadas $(1, 0, 0)$ y eje la recta $x = 0, y = 0$. La curva que se obtiene como

intersección de ambas superficies es una curva de Viviani de ecuaciones cartesianas o implícitas:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4, \quad z \geq 0, \text{ (expresión analítica de la semiesfera)}, \\ (x-1)^2+y^2=1, \text{ (expresión analítica del cilindro)}. \end{cases}$$

La curva de Viviani es la siguiente:



Curva de Viviani

Vamos a buscar una representación paramétrica de dicha curva. La circunferencia base del cilindro se puede parametrizar como sigue:

$$x(t)=1+\cos t, \; y(t)=\sin t, \; z(t)=0,$$

con $t \in [0,2\pi)$. Sustituyendo los valores de x e y en la expresión de la esfera obtenemos:

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2=4 &\iff (1+\cos t)^2+(\sin t)^2+z^2=4 \\ &\iff 1+2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t+z^2=4 \\ &\iff z^2=2-2\cos t \\ &\iff z^2=2-2\left(\cos^2\tfrac{t}{2}-\sin^2\tfrac{t}{2}\right) \\ &\iff z^2=2\left(\cos^2\tfrac{t}{2}+\sin^2\tfrac{t}{2}\right)-2\cos^2\tfrac{t}{2}+2\sin^2\tfrac{t}{2} \\ &\iff z^2=4\sin^2\tfrac{t}{2} \\ &\iff z=2\sin\tfrac{t}{2} \text{ pues } z \geq 0. \end{aligned}$$

Obsérvese que para valores de $t \in [0, 2\pi)$, $\sin \frac{t}{2}$ es siempre positivo o nulo. Por tanto, una parametrización de la curva de Viviani es:

$$\vec{r}(t) = \left(1 + \cos t,\ \ \sin t,\ \ 2 \sin \tfrac{t}{2}\right), t \in [0, 2\pi).$$

NOTA: Para el estudio local de las curvas se verá que la representación analítica más cómoda será la representación paramétrica.

Definición. Representación paramétrica regular. Se dice que una aplicación $\vec{r}\colon I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, es una *representación paramétrica regular* de una curva C si se verifican las siguientes tres condiciones:

1. $\operatorname{Im} \vec{r} = C$,

2. $\vec{r}$ es una aplicación diferenciable de clase al menos 3,

3. El vector tangente a la curva en cualquier punto $P \in C$ no se anula; esto es,
$$\vec{r}\,'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \neq \vec{0} \text{ para todo } t \in I.$$

Definición. Sea C una curva con representación paramétrica $\vec{r}\colon I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Se dice que un punto $P = \vec{r}(t_0) \in C$ es un *punto singular* si $\vec{r}\,'(t_0) = \vec{0}$. Si $\vec{r}\,'(t_0) \neq \vec{0}$ entonces se dice que el punto $P = \vec{r}(t_0)$ es un *punto regular.* Si existen dos valores $t_1, t_2 \in I$ tales que $\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2) = P$, entonces se dice que el punto P es un *punto doble.*

Definición. Una curva C se dice que es *plana* si está contenida en un plano. En caso contrario se dice que es una curva *alabeada.*

Ejercicio Representar las curvas cuyas parametrizaciones son las siguientes:

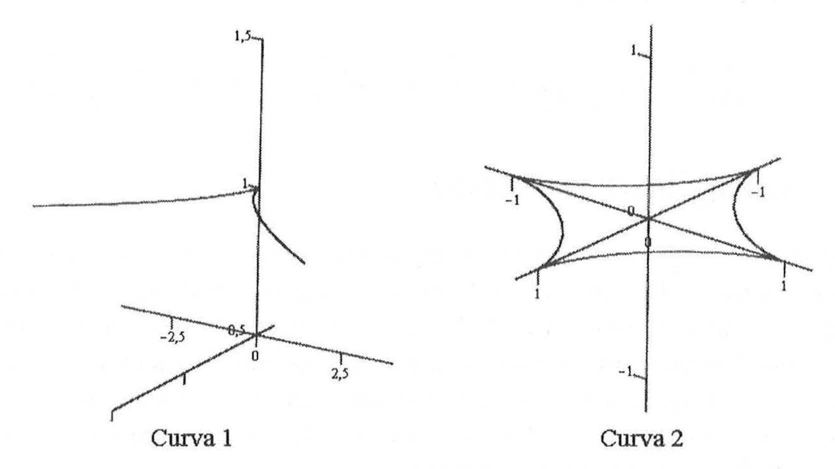
1. $\vec{r}(t) = (t^2, t^3, 1)$

2. $\vec{r}(t) = \left(\cos^3 t,\ \ \sin^3 t,\ \ 0\right)$, $t \in [0, 2\pi)$,

y estudiad si son curvas planas y si sus respectivas parametrizaciones son regulares.

Solución.

1. La aplicación $\vec{r}$ es diferenciable de clase C^∞. Es una curva plana contenida en el plano $z = 1$. Se tiene: $\vec{r}\,'(t) = (2t, 3t^2, 0)$. Como $\vec{r}\,'(0) = \vec{0}$ el punto $P = \vec{r}(0) = (0, 0, 1)$ es un punto singular de la curva. El resto de puntos de la curva son puntos regulares pues $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$ si $t \neq 0$.



Curva 1 Curva 2

2. La aplicación $\vec{r}$ es diferenciable de clase C^∞. Es una curva plana contenida en el plano $z = 0$. Se tiene: $\vec{r}\,'(t) = \left(-3\cos^2 t \sin t,\ 3\sin^2 t \cos t,\ 0\right) = (0, 0, 0)$ si $\sin t = 0$ ó $\cos t = 0$; esto es, si $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$. Por tanto, los puntos

$$\begin{aligned} \vec{r}(0) &= (1,0,0)\,, \quad \vec{r}(\pi/2) = (0,1,0)\,, \\ \vec{r}(\pi) &= (-1,0,0)\,, \quad \vec{r}(3\pi/2) = (0,-1,0)\,, \end{aligned}$$

son puntos singulares.

1.1 Cambio admisible de parámetro

Se dice que una función $t = t(s)$, $s \in J \subseteq \mathbb{R}$, es un *cambio admisible de parámetro* si verifica las siguientes condiciones:

(a) $t = t(s)$ es una función diferenciable al menos de clase 3,
(b) $t\,'(s) \neq 0$, $\forall s \in J$.

NOTA: Nótese que en el cálculo integral cuando se considera un cambio de variable se está considerando un cambio admisible de parámetro.

Ejemplo La función $t(\theta) = \tan\frac{\theta}{2}$, $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, es un cambio admisible de parámetro para cualquier representación paramétrica regular $\vec{r}(t)$, $t \in I \subseteq \mathbb{R}$, de una curva C ya que la función $t(\theta) = \tan\frac{\theta}{2}$ es una función de clase 3 en el intervalo $J = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ y además

$$\frac{dt}{d\theta}(\theta) = \frac{1}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2\frac{\theta}{2}\right) \neq 0, \, \forall\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

2 Longitud de arco

Una representación paramétrica importante será aquella en la que el parámetro a considerar es la longitud de la curva desde un punto que se considerará el punto inicial para el cálculo de la distancia y un punto arbitario de la curva.

Consideremos una curva C con representación paramétrica regular $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, con $t \in I$. Recordamos que la longitud de arco entre un punto $A = \vec{r}(t_0)$ con $t_0 \in I$ y un punto arbitrario de la curva $X = \vec{r}(t)$, $t \in I$ viene dada por la siguiente integral:

$$\int_{t_0}^{t} \|\vec{r}\,'(u)\| \, du,$$

donde $\|\vec{r}\,'(u)\| = \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2 + z'(u)^2}$ es la longitud del vector $\vec{r}\,'(u)$. La función $s(t)$ que a cada valor de $t \in I$ le asigna la longitud de arco desde el punto $A = \vec{r}(t_0)$ al punto $X = \vec{r}(t)$; esto es,

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\vec{r}\,'(u)\| \, du$$

se denomina *longitud de arco de la curva* C. Nótese que

$$s\,'(t) = \|\vec{r}\,'(t)\| \neq 0, \ \forall t \in I,$$

pues $\vec{r}(t)$ es una representación paramétrica regular. Por tanto la longitud de arco es un cambio admisible de parámetro. Como $s\,'(t) \neq 0$, $\forall t \in I$, la función $s(t)$ es invertible y su inversa $t = t(s)$ tiene derivada $1/\|\vec{r}\,'(t(s))\|$; esto es,

$$t\,'(s) = \frac{1}{\|\vec{r}\,'(t(s))\|}$$

Podemos considerar una representación paramétrica de la curva con parámetro la longitud de arco de la curva; esto es,

$$\vec{\alpha}\colon J \longrightarrow \mathbb{R}^3, \ \vec{\alpha}(s) = \vec{r}(t(s)).$$

Dicha representación se denomina la *representación paramétrica natural de la curva C.*

Ejercicios

1. Se considera la curva C intersección de las superficies de ecuaciones:

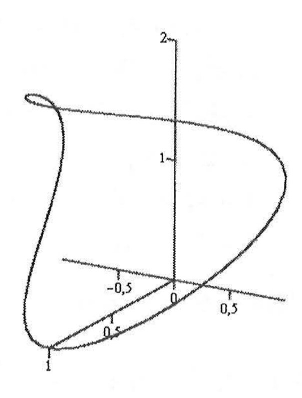
$$\begin{aligned} S_1 &\equiv y^2 + (z-1)^2 = 1, \\ S_2 &\equiv x + y^2 = 1. \end{aligned}$$

Se pide una representación paramétrica regular de dicha curva y la función longitud de arco.

Solución. Una representación paramétrica de C es:

$$\vec{r}(t) = (1 - \sin^2(t), \sin(t), 1 + \cos(t)), \ \text{con } t \in [0, 2\pi).$$

Y el siguiente dibujo muestra dicha curva:



Como

$$\vec{r}\,'(t) = (-2\sin(t)\cos(t), \cos(t), -\sin(t)) \neq \vec{0}, \ \forall\, t \in [0, 2\pi),$$

la representación paramétrica $\vec{r}(t)$ es regular. Se tiene:

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \|\vec{r}\,'(u)\|\,du \\ &= \int_0^t \sqrt{(-2\sin(u)\cos(u))^2+\cos^2(u)+\sin^2(u)}du \\ &= \int_0^t \sqrt{4\sin^2(u)\cos^2(u)+1}du \\ &= \int_0^t \sqrt{\sin^2(2u)+1}du. \end{aligned}$$

2. Se considera la curva C con representación paramétrica:

$$\vec{r}(t)=\left((t+\pi)\cos(t),\ \ -(t+\pi)\sin(t),\ \frac{t^2}{2}+\pi t+\frac{\pi^2}{2}\right),\ \text{con } t\in[-2\pi,2\pi].$$

Se pide la función longitud de arco.

Solución. Se tiene:

$$\vec{r}\,'(t)=(\cos(t)-(t+\pi)\sin(t),\ \ -\sin(t)-(t+\pi)\cos(t),\ 2t+\pi),$$

con $t\in[-2\pi,2\pi]$, luego

$$\begin{aligned} \|\vec{r}\,'(t)\|^2 &= (\cos(t)-(t+\pi)\sin(t))^2 \\ &\quad +(-\sin(t)-(t+\pi)\cos(t))^2+(2t+\pi)^2 \\ &= \cos^2(t)-2(t+\pi)\cos(t)\sin(t)+(t+\pi)^2\sin^2(t) \\ &\quad +\sin^2(t)+2(t+\pi)\sin(t)\cos(t)+(t+\pi)^2\cos^2(t) \\ &\quad +(2t+\pi)^2 \\ &= 1+(t+\pi)^2+(2t+\pi)^2 \\ &= 1+5t^2+6\pi t+2\pi^2. \end{aligned}$$

Por tanto, $\|\vec{r}\,'(t)\|=0$ si y sólo si

$$1+5t^2+6\pi t+2\pi^2=0 \Longleftrightarrow t=\frac{-6\pi\pm\sqrt{36\pi^2-20(2\pi^2+1)}}{10}.$$

Luego $\|\vec{r}\,'(t)\|\neq 0$, para $t\in[-2\pi,2\pi]$. Se tiene:

$$s(t)=\int_{-2\pi}^t \|\vec{r}\,'(u)\|\,du=\int_{-2\pi}^t \sqrt{1+5u^2+6\pi u+2\pi^2}du.$$

3. Se considera la curva C con representación paramétrica:

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(t),\ \frac{\sqrt{2}}{2}t,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(t) \right),\ \forall\ t \in [0, 2\pi).$$

Se pide la representación natural de dicha curva.

Solución. Se tiene:

$$\vec{r}\,'(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(t),\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(t) \right),\ \forall\ t \in [0, 2\pi).$$

Luego

$$\begin{aligned} \|\vec{r}\,'(t)\| &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(t) \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(t) \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}\cos^2(t) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin^2(t)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1, \end{aligned}$$

por tanto, la longitud de arco viene dada por la función:

$$s(t) = \int_0^t \|\vec{r}\,'(u)\|\, du = \int_0^t 1 du = t.$$

Por tanto, t es el parámetro arco y la representación dada en el enunciado es la representación natural.

4. Se considera la curva C con representación paramétrica:

$$\vec{r}(t) = (a\cos(t),\ a\sin(t),\ bt),\quad \forall t \in [0, +\infty).$$

Se pide la representación natural de dicha curva.

Solución. Se tiene:

$$\vec{r}\,'(t) = (-a\sin(t),\ a\cos(t),\ b),\quad \forall t \in [0, +\infty).$$

Luego

$$\begin{aligned}\|\vec{r}\,'(t)\| &= \sqrt{a^2\sin^2(t)+a^2\cos^2(t)+b^2}\\ &= \sqrt{a^2+b^2},\end{aligned}$$

por tanto, la longitud de arco viene dada por la función:

$$\begin{aligned}s(t) &= \int_0^t \|\vec{r}\,'(u)\|\,du\\ &= \int_0^t \sqrt{a^2+b^2}du\\ &= \sqrt{a^2+b^2}t,\end{aligned}$$

que es una aplicación lineal. Se tiene,

$$s\,'(t)=\sqrt{a^2+b^2}\neq 0,$$

por lo que es un cambio admisible de parámetro. Se tiene:

$$t(s)=\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

y, por tanto, la representación natural de la curva C es la siguiente:

$$\vec{r}(t(s))=\left(a\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),\ a\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),\ b\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),$$

donde el parámetro arco s toma valores en el intervalo $[0,+\infty)$.

3 Estudio local de una curva

Sea una curva $C\subset\mathbb{R}^3$ con representación paramétrica regular $\vec{r}(t)$, $t\in I\subseteq\mathbb{R}$, de clase mayor o igual a 3 y sea

$$s=s(t)=\int_{t_0}^t \|\vec{r}\,'(u)\|\,du,$$

el parámetro arco. Por tanto, también podemos considerar la representación natural de C:

$$\vec{\alpha}(s)=\vec{r}(t(s)),\ s\in J\subseteq\mathbb{R}.$$

3.1 Recta tangente y plano normal.

El vector

$$\vec{r}\,'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

es un vector tangente a la curva C en el punto $P = \vec{r}(t)$. En general, dicho vector no es unitario. Denotaremos $\vec{t}(t)$ al *vector unitario tangente* a la curva C en el punto $P = \vec{r}(t)$; esto es,

$$\vec{t}(t) = \frac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|}. \tag{1}$$

Si consideramos la representación natural de la curva C, $\vec{\alpha}(s) = \vec{r}(t(s))$, se tiene:

$$\vec{\alpha}'(s) = \vec{r}\,'(t(s))t'(s)$$

y

$$\begin{aligned} \|\vec{\alpha}'(s)\| &= \|\vec{r}\,'(t(s))\|\,|t'(s)| \\ &= \frac{1}{|t'(s)|}|t'(s)| \\ &= 1. \end{aligned}$$

Nota. Cuando consideramos la representación natural de la curva, al calcular el vector tangente obtenemos directamente un vector unitario; esto es,

$$\vec{t}(s) = \vec{\alpha}'(s). \tag{2}$$

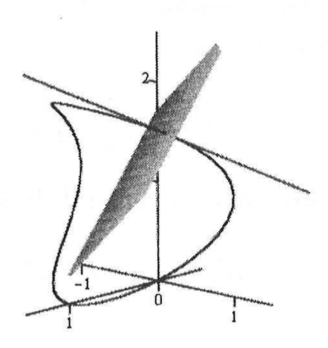
Definición. La *recta tangente* a una curva C en un punto P es la recta que tiene el mismo vector tangente en P que la curva C. Se dice que la recta tangente tiene un orden de contacto 1 con la curva C en el punto P.

Por tanto, la recta tangente a la curva C con vector tangente $\vec{t} = (v_1, v_2, v_3)$ en el punto $P = (a, b, c)$ tiene la siguiente parametrización natural: $\vec{r}(\lambda) = \overrightarrow{OP} + \lambda\vec{t}$, esto es,

$$\begin{aligned} x(\lambda) &= a + \lambda v_1, \\ y(\lambda) &= b + \lambda v_2, \\ z(\lambda) &= c + \lambda v_3. \end{aligned}$$

Definición. El *plano normal* a una curva C en un punto P es el plano ortogonal a la recta tangente y que contiene al punto P.

En el siguiente dibujo se han representado las rectas tangente y el plano normal de la curva con parametrización $\vec{r}(t) = (1 - \sin^2(t), \sin(t), 1 + \cos(t))$, con $t \in [0, 2\pi)$, en el punto $P = \vec{r}(\pi/4)$.



Recta tangente y plano normal

Sea π el plano normal de la curva C con vector tangente $\vec{t} = (v_1, v_2, v_3)$ en el punto $P = (a, b, c)$. Un punto X pertenece al plano normal si verifica la siguiente ecuación vectorial:

$$\left(\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP}\right) \cdot \vec{t} = 0$$

Esto es, si (x, y, z) son las coordenadas del punto X, la ecuación implícita o cartesiana del plano normal es:

$$(x - a)v_1 + (y - b)v_2 + (z - c)v_3 = 0.$$

Ejemplos

1. Consideramos la curva C de ecuación paramétrica:

$$\vec{r}(t) = (a\cos(t),\ a\sin(t),\ b), \quad t \in [0, 2\pi),$$

con $a \neq 0$. Se pide calcular:

(a) El vector tangente unitario a C en el punto P de coordenadas $(0, a, b)$.

(b) La recta tangente a C en el punto P de coordenadas $(0, a, b)$ y en un punto arbitrario de la curva; esto es, un punto de coordenadas $(a\cos(t_0), a\sin(t_0), b)$.

(c) El plano normal de C en el punto P de coordenadas $(0, a, b)$ y en un punto arbitrario de la curva; esto es, un punto de coordenadas $(a\cos(t_0), a\sin(t_0), b)$.

Solución. El vector tangente a C en un punto arbitario de la curva es:

$$\vec{r}\,'(t) = (-a\sin(t),\ a\cos(t),\ 0).$$

Se tiene: $\|\vec{r}\,'(t)\| = a \neq 0$ pues $a \neq 0$. Por tanto, el vector tangente unitario en un punto arbitario es:

$$\vec{t}(t) = \frac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|} = (-\sin(t),\ \cos(t),\ 0)\,.$$

El punto P se alcanza cuando $\cos(t_0) = 0$, $\sin(t_0) = 1$, luego para el valor del parámetro: $t_0 = \pi/2$. Por tanto, el vector tangente unitario a la curva C en el punto P es el vector:

$$\vec{t}(\pi/2) = (-1,\ 0,\ 0)\,.$$

La recta tangente a C en el punto P viene dada por la siguiente parametrización:

$$\begin{aligned} \vec{r}(\lambda) &= \overrightarrow{OP} + \lambda\vec{t}(\pi/2) \\ &= (0, a, b) + \lambda(-1, 0, 0) \\ &= (-\lambda, a, b). \end{aligned}$$

Y la recta tangente en un punto arbitrario de la curva tiene la siguiente parametrización:

$$\begin{aligned} \vec{r}(\lambda) &= \overrightarrow{OX} + \lambda\vec{t}(t_0) \\ &= (a\cos(t_0),\ a\sin(t_0),\ b) + \lambda\,(-\sin(t_0),\ \cos(t_0),\ 0) \\ &= (a\cos(t_0) - \lambda\sin(t_0),\ a\sin(t_0) + \lambda\cos(t_0),\ b). \end{aligned}$$

El plano normal en el punto P tiene la siguiente ecuación vectorial: $(\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP}) \cdot \vec{t}(\pi/2) = 0$. La ecuación implícita del plano normal en P es:

$$(x - 0,\ y - a,\ z - b) \cdot (-1, 0, 0) = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

El plano normal en el punto arbitario tiene la siguiente ecuación vectorial: $(\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OX_0}) \cdot \vec{t}(t_0) = 0$. La ecuación implícita del plano normal en un punto arbitario es:

$$\begin{aligned} 0 &= (x - a\cos(t_0),\ y - a\sin(t_0),\ z - b) \cdot (-\sin(t_0),\ \cos(t_0),\ 0) \\ &= -x\sin(t_0) + a\sin(t_0)\cos(t_0) + y\cos(t_0) - a\cos(t_0)\sin(t_0) \\ &= -x\sin(t_0) + y\cos(t_0). \end{aligned}$$

2. Consideramos la curva C de ecuación paramétrica:

$$\vec{r}(t) = (2\cos(t),\ 2\sin(t),\ 5t), \quad t \in [0, +\infty).$$

Se pide calcular:

(a) El vector tangente unitario a C en el punto P de coordenadas $\left(0, 2, \frac{5\pi}{2}\right)$.

(b) La recta tangente a C en el punto P de coordenadas $\left(0, 2, \frac{5\pi}{2}\right)$.

(c) El plano normal de C en el punto P de coordenadas $\left(0, 2, \frac{5\pi}{2}\right)$.

Solución. El vector tangente a C en un punto arbitario de la curva es:

$$\vec{r}\,'(t) = (-2\sin(t),\ 2\cos(t),\ 5).$$

Se tiene: $\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{4+25} \neq 1$, luego t no es el parámetro arco. Por tanto, el vector tangente unitario en un punto arbitario es:

$$\vec{t}(t) = \frac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|} = \left(-\frac{2}{\sqrt{29}}\sin(t),\ \frac{2}{\sqrt{29}}\cos(t),\ \frac{5}{\sqrt{29}}\right).$$

El punto P se alcanza cuando $\cos(t_0) = 0$, $\sin(t_0) = 1$, luego para el valor del parámetro: $t_0 = \pi/2$. Por tanto, el vector tangente unitario a la curva C en el punto P es el vector:

$$\vec{t}(\pi/2) = \left(-\frac{2}{\sqrt{29}},\ 0,\ \frac{5}{\sqrt{29}}\right).$$

La recta tangente a C en el punto P viene dada por la siguiente parametrización:

$$\begin{aligned} \vec{r}(\lambda) &= \overrightarrow{OP} + \lambda\vec{t}(\pi/2) \\ &= \left(0, 2, \frac{5\pi}{2}\right) + \lambda\left(-\frac{2}{\sqrt{29}}, 0, \frac{5}{\sqrt{29}}\right) \\ &= \left(-\lambda\frac{2}{\sqrt{29}}, 2, \frac{5\pi}{2} + \lambda\frac{5}{\sqrt{29}}\right). \end{aligned}$$

El plano normal en el punto P tiene la siguiente ecuación vectorial: $(\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP}) \cdot \vec{t}(\pi/2) = 0$. La ecuación implícita del plano normal en P es:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(x - 0,\ y - 2,\ z - \frac{5\pi}{2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{29}}, 0, \frac{5}{\sqrt{29}}\right) \\ &= -\frac{2}{\sqrt{29}}x + \frac{5}{\sqrt{29}}\left(z - \frac{5\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

3. *Curva de Viviani.* Consideramos la curva C de ecuación paramétrica:

$$\vec{r}(t) = \left(1 + \cos t,\ \ \sin t,\ \ 2\sin\tfrac{t}{2}\right), t \in [0, 2\pi).$$

Se pide calcular:

(a) El vector tangente unitario a C en el punto P de coordenadas $(0,0,2)$.

(b) La recta tangente a C en el punto P de coordenadas $(0,0,2)$.

(c) El plano normal de C en el punto P de coordenadas $(0,0,2)$.

Solución. El vector tangente a C en un punto arbitario de la curva es:

$$\vec{r}\,'(t) = \left(-\sin(t),\ \ \cos(t),\ \ \cos\left(\tfrac{t}{2}\right)\right).$$

Se tiene: $\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{1 + \cos^2\left(\frac{t}{2}\right)} \neq 1$, luego t no es el parámetro arco. El punto P se alcanza cuando $1 + \cos(t_0) = 0$, $\sin(t_0) = 0$ y $2\sin\left(\frac{t_0}{2}\right) = 2$, luego para el valor del parámetro: $t_0 = \pi$. Por tanto, el vector tangente unitario a la curva C en el punto P es el vector:

$$\begin{aligned} \vec{t}(\pi) &= \frac{1}{\|\vec{r}\,'(\pi)\|}\vec{r}\,'(\pi) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2(\pi)}}\left(-\sin(\pi),\ \ \cos(\pi),\ \ \cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= (0, -1, 0). \end{aligned}$$

La recta tangente a C en el punto P viene dada por la siguiente parametrización:

$$\begin{aligned} \vec{r}(\lambda) &= \overrightarrow{OP} + \lambda\vec{t}(\pi) \\ &= (0,0,2) + \lambda\,(0,-1,0) \\ &= (0, -\lambda, 2). \end{aligned}$$

El plano normal en el punto P tiene la siguiente ecuación vectorial:

$$(\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP}) \cdot \vec{t}(\pi) = 0.$$

La ecuación implícita del plano normal en P es:

$$\begin{aligned} 0 &= (x-0,\ y-0,\ z-2) \cdot (0,-1,0) \\ &= -y. \end{aligned}$$

3.2 Curvatura. Normal principal. Plano osculador.

El vector tangente varía a lo largo de la curva. Sea $\vec{\alpha}\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ la parametrización natural de la curva C. El vector

$$\vec{\alpha}''(s) = \frac{d\vec{t}}{ds}(s),$$

mide la variación del vector tangente en un entorno del punto $P = \vec{\alpha}(s)$.

Definición. Llamamos *vector curvatura* de la curva C con parametrización natural $\vec{\alpha}\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ en el punto $P = \vec{\alpha}(s)$ al vector $\vec{\alpha}''(s)$. LLamaremos *curvatura* o *curvatura de flexión* al módulo del vector curvatura; esto es, la curvatura de flexión es la función

$$\kappa(s) = \left\| \vec{\alpha}''(s) \right\|. \tag{3}$$

Interpretación geométrica de la curvatura de flexión. La curvatura de flexión mide la variación del ángulo que forman las respectivas rectas tangentes de puntos próximos de la curva. Sea $\theta(s)$ el ángulo que forma la recta tangente a C en el punto $\vec{\alpha}(s_0)$ con la recta tangente a C en el punto $\vec{\alpha}(s)$. Se tiene:

$$\lim_{s \to s_0} \frac{\theta(s)}{|s-s_0|} = \lim_{s \to s_0} \frac{\theta(s)}{|s-s_0|} \frac{\sin\frac{\theta(s)}{2}}{\frac{\theta(s)}{2}} = \lim_{s \to s_0} \frac{2\sin\frac{\theta(s)}{2}}{|s-s_0|},$$

y teniendo en cuenta la igualdad

$$\left\| \vec{\alpha}'(s) - \vec{\alpha}'(s_0) \right\| = 2\sin\frac{\theta(s)}{2},$$

obtenemos:

$$\lim_{s \to s_0} \frac{2\sin\frac{\theta(s)}{2}}{|s-s_0|} = \lim_{s \to s_0} \frac{\left\| \vec{\alpha}'(s) - \vec{\alpha}'(s_0) \right\|}{|s-s_0|} = \left\| \vec{\alpha}''(s_0) \right\|.$$

Nota. El vector curvatura (si $\kappa(s) \neq 0$) es perpendicular al vector tangente ya que derivando la igualdad: $\vec{t}(s) \cdot \vec{t}(s) = 1$ tenemos:

$$0 = (\vec{t}(s) \cdot \vec{t}(s))' = 2\vec{t}\,'(s) \cdot \vec{t}(s).$$

Definición. Llamamos *vector normal principal* y lo denotamos por $\vec{n}$ al vector unitario en la direccción del vector curvatura; esto es,

$$\vec{n}(s) = \frac{\vec{\alpha}''(s)}{\|\vec{\alpha}''(s)\|}. \tag{4}$$

Se tiene:

$$\vec{t}\,'(s) = \vec{\alpha}''(s) = \|\vec{\alpha}''(s)\| \frac{\vec{\alpha}''(s)}{\|\vec{\alpha}''(s)\|} = \kappa(s)\vec{n}(s). \tag{5}$$

Definición. La *recta normal principal* a una curva C en un punto P es la recta que contiene al punto P y tiene vector director el vector normal a la curva en P. Por tanto, la recta normal principal a la curva C con vector normal $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ en el punto $P = (a, b, c)$ tiene la siguiente parametrización natural: $\vec{r}(\lambda) = \overrightarrow{OP} + \lambda\vec{n}$, esto es,

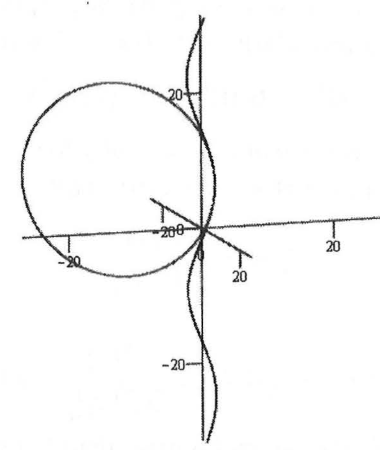
$$\begin{aligned} x(\lambda) &= a + \lambda n_1, \\ y(\lambda) &= b + \lambda n_2, \\ z(\lambda) &= c + \lambda n_3. \end{aligned}$$

Definición. El *plano osculador* de una curva C en un punto P es el plano que contiene a las rectas tangente y normal de la curva en el punto P.

Sea la curva C con vector tangente $\vec{t} = (v_1, v_2, v_3)$ y vector normal principal $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ en el punto $P = (a, b, c)$. Un punto X pertenece al plano osculador si y sólo si el vector $\overrightarrow{PX}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{t}$ y $\vec{n}$. Por tanto, si (x, y, z) son las coordenadas del punto X estas deben verificar la siguiente ecuación:

$$0 = \begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix}.$$

Llamamos *circunferencia osculatriz de la curva C en el punto $P = \vec{\alpha}(s_0)$* a una circunferencia contenida en el plano osculador de C en P cuyo centro, llamado *centro de curvatura*, se encuentra sobre la recta normal principal en la dirección del vector $\vec{n}$ y cuyo radio es $R(s_0) = 1/\kappa(s_0)$. Veáse el siguiente dibujo.



Circunferencia Osculatriz

La circunferencia osculatriz tiene un orden de contacto máximo con la curva (tiene el mismo vector tangente y mismo vector normal que la curva en el punto P).

El centro Z de la circunferencia osculatriz en el punto $P = \vec{\alpha}(s_0)$ satisface la siguiente ecuación:

$$\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OP} + R(s_0)\vec{n}(s_0).$$

La ecuación de la circunferencia osculatriz es:

$$\left\|\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OZ}\right\| = R(s_0).$$

3.3 Recta binormal y plano rectificante. Torsión.

Sea C una curva con parametrización natural $\vec{\alpha}\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$.

Definición. Llamamos *vector binormal* y lo denotamos por $\vec{b}$ al vector unitario ortogonal al vector tangente y al vector normal; esto es,

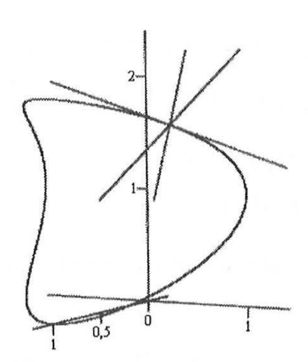
$$\vec{b}(s) = \vec{t}(s) \wedge \vec{n}(s). \tag{6}$$

Definición. La *recta binormal* a una curva C en un punto P es la recta que contiene al punto P y cuyo vector director es el vector binormal a la curva en P. Por tanto, la recta binormal a la curva C con vector binormal $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ en el punto $P = (a, b, c)$ tiene la siguiente parametrización

natural: $\vec{r}(\lambda) = \overrightarrow{OP} + \lambda\vec{b}$, esto es,

$$\begin{aligned} x(\lambda) &= a + \lambda b_1, \\ y(\lambda) &= b + \lambda b_2, \\ z(\lambda) &= c + \lambda b_3. \end{aligned}$$

En el siguiente dibujo se han representado las rectas tangente, normal principal y binormal de la curva con parametrización $\vec{r}(t) = (1 - \sin^2(t), \sin(t), 1 + \cos(t))$, con $t \in [0, 2\pi)$, en el punto $P = \vec{r}(\pi/4)$:



Rectas tangente, normal principal y normal

Definición. El *plano rectificante* de una curva C en un punto $P = \vec{\alpha}(s_0) = (a, b, c)$ es el plano que contiene a las rectas tangente y binormal de la curva en el punto P. Por tanto, el plano rectificante tiene la siguiente ecuación vectorial:

$$(\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP}) \cdot \vec{n}(s_0) = 0 \Longleftrightarrow (x - a)\, n_1 + (y - b)\, n_2 + (z - c)\, n_3 = 0.$$

Para medir la separación de la curva de su plano osculador en un punto o equivalentemente la variación del plano osculador de un punto a otro de la curva, estudiamos la variación del vector binormal.

Se tiene:

$$\vec{b}'(s) = \vec{t}\,'(s) \wedge \vec{n}(s) + \vec{t}(s) \wedge \vec{n}'(s).$$

Vamos a calcular la variación del vector normal. El vector normal es un vector unitario y por tanto $\vec{n}'(s)$ es un vector ortogonal a $\vec{n}(s)$. Por tanto, $\vec{n}'(s)$ es combinación lineal de los vectores tangente y binormal. Esto es,

$$\vec{n}'(s) = \mu(s)\vec{t}(s) + \tau(s)\vec{b}(s). \tag{7}$$

Derivando la identidad $\vec{n}(s) \cdot \vec{t}(s) = 0$ se obtiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\vec{n}(s) \cdot \vec{t}(s)\right)' \\ &= \vec{n}'(s) \cdot \vec{t}(s) + \vec{n}(s) \cdot \vec{t}\,'(s) \\ &= \Big(\mu(s)\vec{t}(s) + \tau(s)\vec{b}(s)\Big) \cdot \vec{t}(s) + \vec{n}(s) \cdot \kappa(s)\vec{n}(s) \\ &= \mu(s) + \kappa(s). \end{aligned}$$

Por tanto, $\mu(s) = -\kappa(s)$.

Por tanto:

$$\begin{aligned} \vec{b}'(s) &= \vec{t}\,'(s) \wedge \vec{n}(s) + \vec{t}(s) \wedge \vec{n}'(s) \\ &= \kappa(s)\vec{n}(s) \wedge \vec{n}(s) + \vec{t}(s) \wedge \Big(\mu(s)\vec{t}(s) + \tau(s)\vec{b}(s)\Big) \\ &= \tau(s)\vec{t}(s) \wedge \vec{b}(s) \\ &= -\tau(s)\vec{n}(s). \end{aligned} \tag{8a}$$

La función $\tau(s)$ mide la variación del plano osculador en puntos próximos de la curva. Teniendo en cuenta $\vec{n}(s) \cdot \vec{n}(s) = 1$ obtenemos:

$$\vec{b}'(s) \cdot \vec{n}(s) = -\tau(s).$$

Definición. Llamamos *torsión o curvatura de torsión* a la función $\tau(s)$; esto es,

$$\tau(s) = -\vec{b}'(s) \cdot \vec{n}(s).$$

Observación. Si $\tau(s) = 0$, $\forall s$, entonces $\vec{b}'(s) = \vec{0}$ y el vector binormal permanece constante y la curva C esta contenida en el plano osculador; esto es, C es una curva plana.

Proposición. Sea C una curva de clase 3, entonces:

C es plana si y sólo si su torsión es idénticamente nula.

3.4 Triedro móvil o de Frenet.

Sea C una curva de clase al menos 3 con representación natural $\vec{\alpha}\colon J \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, y vector tangente $\vec{t}(s)$, vector normal $\vec{n}(s)$ y vector binormal $\vec{b}(s)$ en cada punto de la curva $P = \vec{\alpha}(s)$.

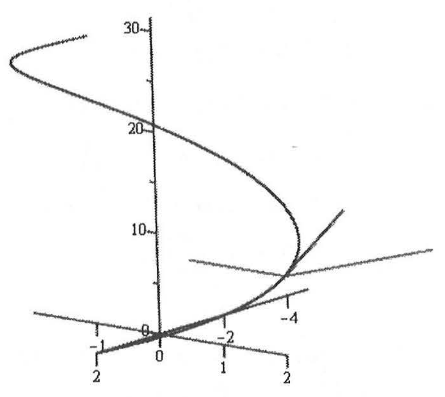
Definición. El triedro $\left\{\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)\right\}$ se denomina *triedro de Frenet* y en cada punto $P = \vec{\alpha}(s)$ de la curva C forma una referencia afín de $\mathbb{R}^3$. El

triedro de Frenet nos da una referencia afín a lo largo de la curva C y por ello también se denomina triedro móvil. Los vectores $\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)$ satisfacen las siguientes relaciones:

$$\vec{t}(s)\cdot\vec{t}(s) = 1, \quad \vec{n}(s)\cdot\vec{n}(s) = 1, \quad \vec{b}(s)\cdot\vec{b}(s) = 1,$$
$$\vec{t}(s)\cdot\vec{n}(s) = 0, \quad \vec{t}(s)\cdot\vec{b}(s) = 0, \quad \vec{n}(s)\cdot\vec{b}(s) = 0.$$

Las rectas tangente, normal y binormal forman los ejes del triedro en cada punto de la curva y los planos normal, osculador y rectificante forman los planos cartesianos respecto de dicha referencia.

En el siguiente dibujo se han representado los elementos del Triedro de Frenet en el punto $P = \vec{r}(\pi/4)$ de la curva con parametrización $\vec{r}(t) = (1 - \sin^2(t), \sin(t), 1 + \cos(t))$, con $t \in [0, 2\pi)$:



Triedro de Frenet

3.5 Triedro de Frenet para una representación paramétrica arbitraria.

Sea C una curva con representación natural $\vec{\alpha}\colon J \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y una representación paramétrica regular arbitraria $\vec{r}\colon I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Con la representación paramétrica natural, los elementos del triedro de Frenet se pueden

calcular con las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}
\vec{t}(s) &= \vec{\alpha}'(s), \\
\vec{n}(s) &= \frac{\vec{\alpha}''(s)}{\left\|\vec{\alpha}''(s)\right\|}, \\
\vec{b}(s) &= \vec{t}(s) \wedge \vec{n}(s) = \frac{\vec{\alpha}'(s) \wedge \vec{\alpha}''(s)}{\left\|\vec{\alpha}''(s)\right\|}, \qquad s \in J.
\end{aligned}$$

Y las curvaturas de flexión y de torsión se obtienen por las fórmulas:

$$\begin{aligned}
\kappa(s) &= \vec{\alpha}''(s) \cdot \vec{n}(s) \\
&= \left\|\vec{\alpha}''(s)\right\|, \\
\tau(s) &= -\vec{b}'(s) \cdot \vec{n}(s) \\
&= -\left(\vec{t}(s) \wedge \vec{n}(s)\right)' \cdot \vec{n}(s) \\
&= -\left(\vec{t}\,'(s) \wedge \vec{n}(s)\right) \cdot \vec{n}(s) - \left(\vec{t}(s) \wedge \vec{n}'(s)\right) \cdot \vec{n}(s) \\
&= -\left(\vec{t}(s) \wedge \vec{n}'(s)\right) \cdot \vec{n}(s) \\
&= -\left(\vec{\alpha}'(s) \wedge \left(\kappa(s)^{-1}\vec{\alpha}''(s)\right)'\right) \cdot \kappa(s)^{-1}\vec{\alpha}''(s) \\
&= -\kappa(s)^{-2}\left(\vec{\alpha}'(s) \wedge \vec{\alpha}'''(s)\right) \cdot \vec{\alpha}''(s) \\
&= \kappa(s)^{-2}\left[\vec{\alpha}'(s), \vec{\alpha}''(s), \vec{\alpha}'''(s)\right] \\
&= \frac{\left[\vec{\alpha}'(s), \vec{\alpha}''(s), \vec{\alpha}'''(s)\right]}{\left\|\vec{\alpha}''(s)\right\|^2}.
\end{aligned}$$

Veamos cuáles son las expresiones de los elementos del triedro de Frenet y de las curvaturas de torsión y de flexión cuando tenemos una representación paramétrica arbitraria $\vec{r}(t)$ de la curva. Se tiene: $\vec{r}(t) = \vec{\alpha}(s(t))$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\vec{r}\,'(t) &= \vec{\alpha}'(s(t))s'(t) \\
&= \vec{\alpha}'(s(t))\left\|\vec{r}\,'(t)\right\| \\
&= \vec{t}(t)\left\|\vec{r}\,'(t)\right\|, \\
\vec{r}\,''(t) &= \vec{\alpha}''(s(t))s'(t)^2 + \vec{\alpha}'(s(t))s''(t), \\
\vec{r}\,'(t) \wedge \vec{r}\,''(t) &= \vec{\alpha}'(s(t))s'(t) \wedge \left(\vec{\alpha}''(s(t))s'(t)^2 + \vec{\alpha}'(s(t))s''(t)\right) \\
&= s'(t)^3\vec{\alpha}'(s(t)) \wedge \vec{\alpha}''(s(t)) \\
&= s'(t)^3\kappa(s(t))\vec{t}(t) \wedge \vec{n}(t) \\
&= \left\|\vec{r}\,'(t)\right\|^3 \kappa(s(t))\vec{b}(t).
\end{aligned}$$

Como $\vec{b}(t)$ es un vector unitario en la dirección del vector $\vec{r}\,'(t) \wedge \vec{r}\,''(t)$ y $\vec{n}(t)$ es un vector unitario ortogonal a $\vec{t}(t)$ y a $\vec{b}(t)$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\vec{t}(t) &= \frac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|}, \\
\vec{b}(t) &= \frac{\vec{r}\,'(t) \wedge \vec{r}\,''(t)}{\|\vec{r}\,'(t) \wedge \vec{r}\,''(t)\|}, \\
\vec{n}(t) &= \vec{b}(t) \wedge \vec{t}(t).
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la igualdad:

$$\vec{r}\,'(t) \wedge \vec{r}\,''(t) = \|\vec{r}\,'(t)\|^3 \, \kappa(s(t))\vec{b}(t),$$

se obtiene:

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{r}\,'(t) \wedge \vec{r}\,''(t)\|}{\|\vec{r}\,'(t)\|^3}. \tag{9}$$

Además, teniendo en cuenta la siguiente igualdad:

$$\vec{r}\,'''(t) = \vec{\alpha}'''(s(t))s'(t)^3 + 3\vec{\alpha}''(s(t))s'(t)s''(t) + \vec{\alpha}'(s(t))s'''(t),$$

y la expresión del vector $\vec{r}\,'(t) \wedge \vec{r}\,''(t)$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
& (\vec{r}\,'(t) \wedge \vec{r}\,''(t)) \cdot \vec{r}\,'''(t) \\
= \;& \big(s'(t)^3\vec{\alpha}'(s(t)) \wedge \vec{\alpha}''(s(t))\big) \cdot \big(\vec{\alpha}'''(s(t))s'(t)^3 + 3\vec{\alpha}''(s(t))s'(t)s''(t) + \vec{\alpha}'(s(t))s'''(t)\big) \\
= \;& s'(t)^6 \left(\vec{\alpha}'(s(t)) \wedge \vec{\alpha}''(s(t))\right) \cdot \vec{\alpha}'''(s(t)) \\
= \;& \|\vec{r}\,'(t)\|^6 \left[\vec{\alpha}'(s(t)), \vec{\alpha}''(s(t)), \vec{\alpha}'''(s(t))\right] \\
= \;& \|\vec{r}\,'(t)\|^6 \, \tau(s(t))\kappa(s(t))^2 \\
= \;& \|\vec{r}\,'(t)\|^6 \, \tau(s(t)) \frac{\|\vec{r}\,'(t) \wedge \vec{r}\,''(t)\|^2}{\|\vec{r}\,'(t)\|^6} \\
= \;& \tau(s(t)) \, \|\vec{r}\,'(t) \wedge \vec{r}''(t)\|^2.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\tau(t) = \frac{[\vec{r}\,'(t), \vec{r}\,''(t), \vec{r}\,'''(t)]}{\|\vec{r}\,'(t) \wedge \vec{r}\,''(t)\|^2}, \tag{10}$$

donde $[\vec{r}\,'(t), \vec{r}\,''(t), \vec{r}\,'''(t)]$ denota el producto mixto de los vectores $\vec{r}\,'(t)$, $\vec{r}\,''(t)$ y $\vec{r}\,'''(t)$; esto es, $[\vec{r}\,'(t), \vec{r}\,''(t), \vec{r}\,'''(t)] = (\vec{r}\,'(t) \wedge \vec{r}\,''(t)) \cdot \vec{r}\,'''(t)$.

3.6 Fórmulas de Frenet-Serret.

Sea C una curva con representación natural $\vec{\alpha}\colon J \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de clase al menos 3. Los vectores del triedro de Frenet $\left\{\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)\right\}$ en cualquier punto $P = \vec{\alpha}(s)$ de la curva, satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \vec{t}\,'(s) &= \kappa(s)\vec{n}(s), \\ \vec{n}'(s) &= -\kappa(s)\vec{t}(s) + \tau(s)\vec{b}(s), \\ \vec{b}'(s) &= -\tau(s)\vec{n}(s), \end{aligned}$$

(véanse las fórmulas (5), (7) y (8a)), llamadas las *fórmulas de Frenet-Serret.* Las fórmulas de Frenet-Serret consituyen un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para los vectores $\left\{\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)\right\}$. Teniendo en cuenta el Teorema de existencia y unicidad de soluciones de un problema de valores iniciales para un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias se tiene el siguiente resultado.

Proposición. Dadas dos funciones $\kappa, \tau\colon J \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase al menos 1 con $\kappa(s) > 0$, $\forall s \in J$, existe, salvo su posición en el espacio, una única curva C tal que $\kappa(s)$ es su función curvatura y $\tau(s)$ es su función torsión.

El resultado anterior nos dice que las funciones torsión y curvatura, $\kappa(s)$ y $\tau(s)$, determinan de manera única la curva. Por esta razón, las ecuaciones $\kappa = \kappa(s)$ y $\tau = \tau(s)$ reciben el nombre de *ecuaciones intrínsecas de la curva.*

Ejemplos

1. Hallar los elementos del triedro de Frenet y la torsión y curvatura de la curva C con representación paramétrica:

   $$\vec{r}(t) = (2\cos(t),\ 2\sin(t),\ 5t), \quad t \in [0, +\infty),$$

   en el punto P de coordenadas $\left(0, 2, \frac{5\pi}{2}\right)$.

   Solución. El punto P se alcanza para el valor $t = \pi/2$. Se tiene:

   $$\vec{r}\,'(t) = (-2\sin(t),\ 2\cos(t),\ 5).$$

   Como $\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{4+25} \neq 1$, el parámetro t no es el parámetro arco. Vamos a considerar la parametrización natural de la curva. Se tiene:

   $$s(t) = \int_0^t \|\vec{r}\,'(u)\|\, du = \int_0^t \sqrt{29} du = \sqrt{29}t.$$

Por tanto,

$$t(s) = \frac{s}{\sqrt{29}},$$

y la parametrización natural de la curva C es:

$$\vec{\alpha}(s) = \vec{r}(t(s)) = \left(2\cos\frac{s}{\sqrt{29}},\ 2\sin\frac{s}{\sqrt{29}},\ 5\frac{s}{\sqrt{29}}\right), \quad s \in [0, +\infty).$$

El punto P se alcanza cuando $t = \pi/2$ y, por tanto, cuando $s = \sqrt{29}\pi/2$. Se tiene:

$$\begin{aligned}
\vec{\alpha}'(s) &= \left(-\frac{2}{\sqrt{29}}\sin\frac{s}{\sqrt{29}},\ \frac{2}{\sqrt{29}}\cos\frac{s}{\sqrt{29}},\ \frac{5}{\sqrt{29}}\right), \\
\vec{\alpha}''(s) &= \left(-\frac{2}{29}\cos\frac{s}{\sqrt{29}},\ -\frac{2}{29}\sin\frac{s}{\sqrt{29}},\ 0\right), \\
\vec{\alpha}'''(s) &= \left(\frac{2}{29\sqrt{29}}\sin\frac{s}{\sqrt{29}},\ -\frac{2}{29\sqrt{29}}\cos\frac{s}{\sqrt{29}},\ 0\right).
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\vec{\alpha}'\left(\frac{\sqrt{29}}{2}\pi\right) &= \left(-\frac{2}{\sqrt{29}},\ 0,\ \frac{5}{\sqrt{29}}\right), \\
\vec{\alpha}''\left(\frac{\sqrt{29}}{2}\pi\right) &= \left(0,\ -\frac{2}{29},\ 0\right), \\
\vec{\alpha}'''\left(\frac{\sqrt{29}}{2}\pi\right) &= \left(\frac{2}{29\sqrt{29}},\ 0,\ 0\right).
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\vec{t}\left(\frac{\sqrt{29}}{2}\pi\right) &= \left(-\frac{2}{\sqrt{29}},\ 0,\ \frac{5}{\sqrt{29}}\right), \\
\vec{n}\left(\frac{\sqrt{29}}{2}\pi\right) &= \frac{1}{\|\vec{\alpha}''(\sqrt{29}\pi/2)\|}\left(0,\ -\frac{2}{29},\ 0\right) = (0,\ -1,\ 0), \\
\vec{b}\left(\frac{\sqrt{29}}{2}\pi\right) &= \left(-\frac{2}{\sqrt{29}},\ 0,\ \frac{5}{\sqrt{29}}\right) \wedge (0,\ -1,\ 0) \\
&= \left(\frac{5}{\sqrt{29}},\ 0,\ \frac{2}{\sqrt{29}}\right).
\end{aligned}$$

Los vectores $\left(-2/\sqrt{29},\ 0,\ 5/\sqrt{29}\right)$, $(0,\ -1,\ 0)$ y $(5/\sqrt{29},\ 0,\ 2/\sqrt{29})$ forman el triedro de Frenet de C en el punto P.

La curvatura de C en P es:

$$\kappa(\sqrt{29}\pi/2) = \left\|\vec{\alpha}''(\sqrt{29}\pi/2)\right\| = \frac{2}{29}.$$

Y la torsión de C en P es:

$$\begin{aligned}
\tau(\sqrt{29}\pi/2) &= \frac{[\vec{\alpha}'(\sqrt{29}\pi/2), \vec{\alpha}''(\sqrt{29}\pi/2), \vec{\alpha}'''(\sqrt{29}\pi/2)]}{\left\|\vec{\alpha}''(\sqrt{29}\pi/2)\right\|^2} \\
&= \left(\frac{29}{2}\right)^2 \begin{vmatrix} -2/\sqrt{29} & 0 & 5/\sqrt{29} \\ 0 & -\frac{2}{29} & 0 \\ 2/29\sqrt{29} & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{29}{2}\right)^2 \frac{5}{\sqrt{29}}\frac{2}{29}\frac{2}{29\sqrt{29}} \neq 0.
\end{aligned}$$

Por tanto, C no es una curva plana.

2. Hallar los elementos del triedro de Frenet de la curva C con representación paramétrica:

$$\vec{r}(t) = (t,\ -t^2,\ 1+t^3), \quad t \in [0, +\infty),$$

en el punto P de coordenadas $(0,0,1)$ y la curvatura y torsión en un punto genérico de la curva.

Solución. Se tiene:

$$\vec{r}\,'(t) = (1,\ -2t,\ 3t^2), \quad t \in [0, +\infty).$$

Como $\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{1+4t^2+9t^4} \neq 1$, el parámetro t no es el parámetro arco. Derivando la representación paramétrica obtenemos:

$$\begin{aligned}
\vec{r}\,''(t) &= (0,\ -2,\ 6t), \\
\vec{r}\,'''(t) &= (0,\ 0,\ 6) \\
\vec{r}\,'(t) \wedge \vec{r}\,''(t) &= (-6t^2,\ -6t,\ -2), \\
\|\vec{r}\,'(t) \wedge \vec{r}\,''(t)\| &= \sqrt{36t^4+36t^2+4} \\
&= 2\sqrt{9t^4+9t^2+1}.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\vec{t}(t) &= \frac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}(1, \; -2t, \; 3t^2), \\
\vec{b}(t) &= \frac{\vec{r}\,'(t) \wedge \vec{r}\,''(t)}{\|\vec{r}\,'(t) \wedge \vec{r}\,''(t)\|} = \frac{1}{2\sqrt{9t^4+9t^2+1}}(-6t^2, \; -6t, \; -2), \\
\vec{n}(t) &= \vec{b}(t) \wedge \vec{t}(t).
\end{aligned}$$

El punto P se alcanza para el valor 0 del parámetro t. Por tanto, los vectores tangente, binormal y normal en P son:

$$\begin{aligned}
\vec{t}(0) &= (1, 0, 0)\,, \\
\vec{b}(0) &= (0, 0, -1)\,, \\
\vec{n}(0) &= \vec{b}(0) \wedge \vec{t}(0) = (0, -1, 0)\,.
\end{aligned}$$

Se tiene:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

luego efectivamente el triedro tiene la orientación positiva.

La curvatura de C viene dada por la función:

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{r}\,'(t) \wedge \vec{r}\,''(t)\|}{\|\vec{r}\,'(t)\|^3} = \frac{2\sqrt{9t^4+9t^2+1}}{(1+4t^2+9t^4)^{3/2}}.$$

Y la torsión de C viene dada por la función:

$$\begin{aligned}
\tau(t) &= \frac{[\vec{r}\,'(t), \vec{r}\,''(t), \vec{r}\,'''(t)]}{\|\vec{r}\,'(t) \wedge \vec{r}\,''(t)\|^2} \\
&= \frac{1}{36t^4+36t^2+4} \begin{vmatrix} 1 & -2t & 3t^2 \\ 0 & -2 & 6t \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \\
&= \frac{-12}{36t^4+36t^2+4} \\
&= \frac{-3}{9t^4+9t^2+1}.
\end{aligned}$$

3. La *evoluta* de una curva es el lugar geométrico de sus centros de curvatura. Se pide calcular la evoluta de la parábola de ecuación $y = \frac{1}{2}x^2$.

Solución. Una parametrización de la parábola de ecuación $y = \frac{1}{2}x^2$ es:

$$\vec{r}(t) = \left(t, \tfrac{1}{2}t^2, 0\right).$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} \vec{r}\,'(t) &= (1, t, 0), \\ \vec{r}\,''(t) &= (0, 1, 0), \\ \vec{r}\,'(t) \wedge \vec{r}\,''(t) &= (0, 0, 1), \end{aligned}$$

por tanto,

$$\begin{aligned} \vec{t}(t) &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, 0\right), \\ \vec{b}(t) &= (0, 0, 1), \\ \vec{n}(t) &= \left(-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, 0\right). \end{aligned}$$

El radio de curvatura es:

$$R(t) = \frac{\|\vec{r}\,'(t)\|^3}{\|\vec{r}\,'(t) \wedge \vec{r}\,''(t)\|} = \left(1+t^2\right)^{3/2}.$$

Por tanto, el lugar geométrico de los centros de curvatura de la curva tiene la siguiente parametrización:

$$\begin{aligned} \vec{\beta}(t) &= \vec{r}(t) + R(t)\vec{n}(t) \\ &= \left(t, \tfrac{1}{2}t^2, 0\right) + \left(1+t^2\right)^{3/2}\left(-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, 0\right) \\ &= \left(t - \frac{t\left(1+t^2\right)^{3/2}}{\sqrt{1+t^2}}, \tfrac{1}{2}t^2 + \frac{\left(1+t^2\right)^{3/2}}{\sqrt{1+t^2}}, 0\right). \end{aligned}$$

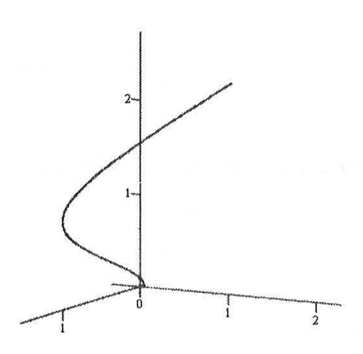
Esto es, la curva en el plano $z = 0$ de ecuación explícita:

$$y = \tfrac{1}{2}x^2 + \left(1+x^2\right)^{3/2}.$$

4. Hallar las ecuaciones intrínsecas de la curva con representación paramétrica:

$$\vec{r}(t) = (e^t \cos(t),\ e^t \sin(t),\ e^t), \quad t \in [0, +\infty).$$

Solución. La siguiente gráfica nos muestra la curva:



Se tiene:

$$\begin{aligned}
\vec{r}\,'(t) &= (e^t (\cos(t) - \sin(t)),\ e^t (\sin(t) + \cos(t)),\ e^t), \\
\vec{r}\,''(t) &= (-2e^t \sin(t),\ 2e^t \cos(t),\ e^t), \\
\vec{r}\,'''(t) &= (-2e^t (\sin(t) + \cos(t)),\ 2e^t (\cos(t) - \sin(t)),\ e^t), \\
\vec{r}\,'(t) \wedge \vec{r}\,''(t) &= e^{2t} (\sin(t) - \cos(t),\ -\cos(t) - \sin(t),\ 2), \\
[\vec{r}\,'(t), \vec{r}\,''(t), \vec{r}\,'''(t)] &= 2e^{3t}.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{r}\,'(t) \wedge \vec{r}\,''(t)\|}{\|\vec{r}\,'(t)\|^3} = \frac{e^{2t}\sqrt{6}}{e^{3t}(3)^{3/2}} = \frac{\sqrt{2}}{3e^t},$$

y

$$\tau(t) = \frac{[\vec{r}\,'(t), \vec{r}\,''(t), \vec{r}\,'''(t)]}{\|\vec{r}\,'(t) \wedge \vec{r}\,''(t)\|^2} = \frac{2e^{3t}}{6e^{4t}} = \frac{1}{3e^t}.$$

Como

$$s = \int_0^t \|\vec{r}\,'(u)\|\, du = \int_0^t e^u \sqrt{3} du = \sqrt{3}\left(e^t - 1\right),$$

se tiene:

$$e^t = \frac{s}{\sqrt{3}} + 1$$

y las ecuaciones intrínsecas de C son:

$$\kappa(s) = \frac{\sqrt{6}}{3\left(s+\sqrt{3}\right)},$$

y

$$\tau(s) = \frac{\sqrt{3}}{3\left(s+\sqrt{3}\right)}.$$

5. Hallar las ecuaciones intrínsecas de la curva C con representación paramétrica:

$$\vec{r}(t) = (a\cos(t),\ a\sin(t),\ bt), \quad t \in [0, +\infty),$$

con $a, b \neq 0$.

Solución. Se tiene:

$$\begin{aligned}
\vec{r}\,'(t) &= (-a\sin(t),\ a\cos(t),\ b),\\
\vec{r}\,''(t) &= (-a\cos(t),\ -a\sin(t),\ 0),\\
\vec{r}\,'''(t) &= (a\sin(t),\ -a\sin(t),\ 0),\\
\vec{r}\,'(t)\wedge\vec{r}\,''(t) &= \left(ab\sin(t),\ -ab\cos(t),\ a^2\right).
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\kappa(t) &= \frac{\|\vec{r}\,'(t)\wedge\vec{r}\,''(t)\|}{\|\vec{r}\,'(t)\|^3} = \frac{\left(a^2b^2+a^4\right)^{1/2}}{\left(a^2+b^2\right)^{3/2}} = \frac{|a|\left(b^2+a^2\right)^{1/2}}{\left(a^2+b^2\right)^{3/2}}\\
&= \frac{|a|}{a^2+b^2} \neq 0,
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\tau(t) &= \frac{[\vec{r}\,'(t), \vec{r}\,''(t), \vec{r}\,'''(t)]}{\|\vec{r}\,'(t)\wedge\vec{r}\,''(t)\|^2} = \frac{1}{a^2\left(a^2+b^2\right)}\begin{vmatrix} -a\sin(t) & a\cot s(t) & b\\ -a\cos(t) & -a\sin(t) & 0\\ a\sin(t) & -a\cos(t) & 0\end{vmatrix}\\
&= \frac{a^2b}{a^2\left(a^2+b^2\right)}\\
&= \frac{b}{a^2+b^2} \neq 0.
\end{aligned}$$

Nóta. Nótese que las ecuaciones intrínsecas de la anterior curva son constantes; esto es, no dependen del parámetro t. La curva anterior es una *hélice circular*. Se puede afirmar que si una curva es tal que su torsión y su curvatura son constantes no nulas, entonces es una hélice de base circular.

3.7 Hélices

Las hélices circulares son un caso especial de una clase de curvas denominadas *hélices*. Las hélices están caracterizadas por la propiedad de que la recta tangente en cada punto de la curva forma un ángulo constante α con una recta l en el espacio que se denomina eje de la hélice.

Sea C una hélice de ángulo θ y eje l, con representación paramétrica natural $\vec{\alpha}\colon J \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Sea $\vec{v}$ un vector unitario en la dirección del eje l. Entonces la hélice C está definida por la ecuación:

$$\vec{t}(s) \cdot \vec{v} = \cos\theta.$$

Derivando la expresión anterior obtenemos:

$$\vec{n}(s) \cdot \vec{v} = 0.$$

Por tanto, el vector $\vec{v}$ se puede escribir de la forma:

$$\vec{v} = \vec{t}(s)\cos\theta + \vec{b}(s)\sin\theta.$$

Derivando la expresión $\vec{n}(s) \cdot \vec{v} = 0 = 0$ obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{n}'(s) \cdot \vec{v} \\ &= \Big(-\kappa(s)\vec{t}(s) + \tau(s)\vec{b}(s)\Big) \cdot \Big(\vec{t}(s)\cos\theta + \vec{b}(s)\sin\theta\Big) \\ &= -\kappa(s)\cos\theta + \tau(s)\sin\theta. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\frac{\kappa(s)}{\tau(s)} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta.$$

Recíprocamente, si una curva regular satisface la condición:

$$\frac{\kappa(s)}{\tau(s)} = a \in \mathbb{R},$$

entonces podemos encontrar un ángulo θ de manera que: $a = \tan\theta$ y por tanto, $\kappa(s)\cos\theta - \tau(s)\sin\theta = 0$. Teniendo en cuenta las fórmulas de Frenet obtenemos:

$$\begin{aligned} \vec{t}\,'(s) &= a\tau(s)\vec{n}(s) = \tan\theta\tau(s)\vec{n}(s), \\ \vec{b}'(s) &= -\tau(s)\vec{n}(s), \end{aligned}$$

tenemos:

$$\begin{aligned} (\vec{t}(s)\cos\theta + \vec{b}(s)\sin\theta)' &= \vec{t}\,'(s)\cos\theta + \vec{b}'(s)\sin\theta \\ &= \tau(s)\left(\tan\theta\cos\theta - \sin\theta\right)\vec{n}(s) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Luego el vector

$$\vec{v} = \vec{t}(s)\cos\theta + \vec{b}(s)\sin\theta,$$

es constante y

$$\vec{v}\cdot\vec{t}(s) = \cos\theta.$$

Por tanto, la curva es una hélice.

Hemos obtenido el siguiente resultado:

3.7.1 *Teorema de Lancret (1802).*

Una curva alabeada con parametrización regular $\vec{r}(t)$, $t \in I \subseteq \mathbb{R}$, es una hélice si y sólo si el cociente $k(t)/\tau(t)$ es constante $\forall t \in I$.

Ejemplos. Veamos si la curva con representación paramétrica

$$\vec{r}(t) = (e^t\cos(t),\ e^t\sin(t),\ e^t), \quad t \in [0, +\infty),$$

es una hélice. Se tiene:

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{2}}{3e^t},$$

y torsión:

$$\tau(t) = \frac{1}{3e^t}.$$

Por tanto,

$$\frac{\kappa(t)}{\tau(t)} = \sqrt{2},$$

luego se trata de una hélice de ángulo θ con $\tan\theta = \sqrt{2}$ y cuyo eje tiene vector director el siguiente:

$$\vec{v} = \vec{t}(s)\cos\left(\arctan\sqrt{2}\right) + \vec{b}(s)\sin\left(\arctan\sqrt{2}\right).$$

3.8 Ejercicios

1. Hallar la ecuación del plano osculador en el punto P de coordenadas $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ de la curva C definida como la intersección de las siguientes superficies:
$$S_1 \equiv x^2 + y^2 = z,$$
$$S_2 \equiv x^2 + y^2 = 1 - y.$$

2. Determínese la curvatura de la curva intersección de las superficies:
$$S_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 11,$$
$$S_2 \equiv x^2 + y^2 = 2, \ z > 0,$$
en el punto P de coordenadas $(0, \sqrt{2}, 3)$.

3. Sea la curva C con parametrización:
$$\vec{r}(t) = \left(t^3, t^2 + 1, t^2 - t\right).$$
Hallar el radio de curvatura en el punto P de coordenadas $(1, 2, 0)$.

4. Se considera la curva C intersección de las superficies:
$$S_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z \geq 0,$$
$$S_2 \equiv (x-1)^2 + y^2 = 1.$$
Se pide:
   (a) Los vectores del triedro de Frenet en el punto P de coordenadas $(2, 0, 0)$.
   (b) La curvatura y la torsión de la curva en el punto P.
   (c) ¿Es C una curva plana?

5. Probar que si la curva es tal que todas sus tangentes pasan por un punto fijo del espacio, entonces la curva es una recta.

6. Sea la curva C con parametrización:
$$\vec{r}(t) = \left((t+\pi)\cos(t), \ -(t+\pi)\sin(t), \ t^2 + \pi t + \frac{\pi^2}{2}\right), \quad t \in [-2\pi, 2\pi].$$
Se pide:

(a) Ecuaciones de los planos del triedro de Frenet en el punto P de coordenadas $\left(0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi^2}{4}\right)$.

(b) Puntos en los cuales el plano osculador es paralelo al plano de ecuación $z = 0$.

(c) Punto interseción del plano normal en el punto P y la recta tangente en el punto Q de ecuación $\left(\pi, 0, \frac{\pi^2}{2}\right)$.

7. Se considera la curva C intersección de las superficies:

$$\begin{aligned} S_1 &\equiv y^2 + (z-1)^2 = 1, \\ S_2 &\equiv x + y^2 = 1. \end{aligned}$$

Se pide:

(a) Vectores del triedro de Frenet en el punto P de coordenadas $(1, 0, 0)$.

(b) Curvatura y torsión de la curva C en el punto P.

(c) ¿Es C una curva plana? En caso afirmativo, obtener la ecuación cartesiana del plano que contiene a la curva.

8. Se considera la curva C con parametrización:

$$\vec{\sigma}(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t,\ \frac{\sqrt{2}}{2}t,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\right),\ t \in \mathbb{R},$$

y el punto P de coordenadas $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\pi, 0\right)$. Se pide:

(a) Comprobar que t es el parámetro arco de la curva dada. Hallar la longitud de la curva desde el punto A de coordenadas $\left(0, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ hasta el punto B de coordenadas $\left(0, 2\sqrt{2}\pi, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

(b) Hallar el plano oculador y la recta binormal en el punto P.

(c) Hallar la torsión y la curvatura (esto es, curvaturas de flexión y de torsión) en un punto genérico de la curva.

(d) Estudiar si la curva es una hélice y en caso afirmativo calcular el eje.

9. Hallar el centro de curvatura de la curva C con parametrización:

$$\vec{\alpha}(t) = \left(te^t,\ e^t,\ t^2 + 1\right)$$

en el punto P de coordenadas $(0, 1, 1)$.

10. Hallar la curvatura de la curva intersección de las superficies $y = \ln \frac{1}{\cos x}$, $z = 0$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, en el punto P de coordenadas $\left(\frac{\pi}{6}, \ln \frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right)$.

11. Hallar la ecuación del plano osculador en el punto P de coordenadas $(1/2, 1/2, 1/2)$, de la curva definida por las siguientes ecuaciones cartesianas:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= z, \\ x^2 + y^2 &= 1 - y. \end{aligned}$$

12. La *cicloide* es el lugar geométrico de los puntos P de una circunferencia de radio r que rueda sin deslizar por una recta. Hallar los puntos singulares de la cicloide con parametrización

$$\vec{r}(t) = (t - \sin t,\ 1 - \cos t)\,, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Hallar el vector tangente a la cicloide en un punto regular arbitrario. ¿Cuál es el límite de los vectores unitarios tangentes cuando tendemos a un punto singular?

13. Hallar la evoluta de la elipse con parametrización $\vec{r}(t) = (a \cot t,\ a \sin t)$, $t \in [0, 2\pi)$.

14. Probar que la curva con parametrización

$$\vec{r}(t) = (t \cos t,\ t \sin t, t)\,, \quad t \in [0, 2\pi),$$

está contenida en un cono. Hallar la curvatura y la torsión en el punto que corresponde al vértice del cono.

15. Demostrar que la curva con parametrización

$$\vec{r}(t) = \left(\sin^2 t,\ \sin t \cot st,\ \cos t\right)\,, \quad t \in [0, 2\pi),$$

está contenida en una esfera y que todos los planos normales a dicha curva contienen al origen de coordenadas.

16. Determínese la curvatura de la curva de ecuaciones cartesianas

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= 11, \quad z\geq 0, \\ x^2+y^2 &= 2, \end{aligned}$$

en el punto P de coordenadas $(0,\sqrt{2},3)$.

17. Determínese una base del plano normal a la curva $x^2+y^2=z$, $x+y+z=2$ en el punto P de coordenadas $(1,-1,2)$.

18. Hállese la curvatura de la curva $y=\ln(1/\cos x)$, $x\in(-\pi/2,\pi/2)$ en el punto de coordenadas $(\pi/6,\ln 2/\sqrt{3})$.

19. Determínese la ecuación cartesiana del plano normal a la curva determinada por $x+y+z=3$ y $x^2-y^2+2z^2=2$ en el punto P de coordenadas $(1,1,1)$.

20. Calcular unas ecuaciones paramétricas de la curva cuyas ecuaciones intrínsecas son $\kappa(s)=4$ y $\tau(s)=3$ y tal que para el valor del parámetro $s=0$ sea

$$\vec{t}(0)=\left(0,\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right), \quad \vec{n}(0)=(-1,0,0), \quad \vec{b}(0)=\left(0,-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right).$$

Sitúese el origen de coordenadas de modo que el punto de la curva correspondiente a $s=0$ tenga coordenadas $\left(\frac{4}{25},0,0\right)$.

21. Las ecuaciones intrínsecas de una curva regular de clase infinito vienen dadas por $\chi(s)=0$, $\tau(s)=0$. Señálense las proposiciones ciertas:

   (a) El enunciado nunca se puede cumplir.

   (b) Se trata de una circunferencia.

   (c) El triedro de Frenet es el mismo en todos los puntos de la curva.

   (d) Se trata de una parábola.

   (e) Se trata de una hélice.

22. Probar que si una curva C es tal que todas sus rectas normales principales contienen a un punto fijo F del espacio, entonces la curva es una circunferencia.

Solución.

Sea C la curva con parametrización natural $\vec{r}(s)$. La ecuación de la recta normal principal por un punto $P = \vec{r}(s)$ de la curva es la siguiente:

$$\overrightarrow{OX} = \vec{r}(s) + \lambda\vec{n}(s), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Como el punto F está contenido en todas las rectas normales principales se verifica:

$$\overrightarrow{OF} = \vec{r}(s) + \lambda(s)\vec{n}(s).$$

Derivando la expresión anterior y teniendo en cuenta las fórmulas de Frenet-Serret obtenemos:

$$\begin{aligned}\vec{0} &= \vec{r}\,'(s) + \lambda'(s)\vec{n}(s) + \lambda(s)\vec{n}'(s)\\ &= \vec{t}(s) + \lambda'(s)\vec{n}(s) + \lambda(s)\left(-\kappa(s)\vec{t}(s) + \tau(s)\vec{b}(s)\right)\\ &= (1-\kappa(s)\lambda(s))\,\vec{t}(s) + \lambda'(s)\vec{n}(s) + \tau(s)\lambda(s)\vec{b}(s).\end{aligned}$$

Como $\left\{\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)\right\}$ es un sistema de vectores linealmente independiente para cada valor de s, de la ecuación anterior se deduce:

$$\left\{\begin{array}{l} 0 = 1-\kappa(s)\lambda(s),\\ 0 = \lambda'(s),\\ 0 = \tau(s)\lambda(s),\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\kappa(s)\lambda(s) = 1,\\ \lambda(s) = \lambda \neq 0 \text{ pues } \kappa(s)\lambda(s) = 1\\ 0 = \tau(s)\lambda(s),\end{array}\right.$$

luego de la tercera ecuación se deduce: $\tau(s) = 0$, y por tanto la curva C es plana y de la primera ecuación se deduce: $\kappa(s) = 1/\lambda$ constante, luego C es una circunferencia.

4 Bibliografía

1. A. F. Costa, M. Gamboa, A. M. Porto, *Ejercicios de Geometría Diferencial de curvas y superficies,* Sanz y Torres, 1998.

2. Manfredo P. do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces,* Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1976.

3. C. G. Gibson, *Elementary Geometry of Differentiable Curves,* Cambridge University Press, 2001.

4. Dirk J. Struik, *Lectures on Classical Differential Geometry,* Dover Publications, Inc., N.Y., 1961.

NOTAS

CUADERNO

314.01

Cuadernos.ijh@gmail.com
info@mairea-libros.com

